**Теоретические основы ЭММ**

Цель и задачи кура "Экономико-математические методы и модели". Моделирование как метод научного познания. Сложность экономических процессов и явлений. Случайность и неопределенность в экономическом развитии. Проверка адекватности моделей. Место математического моделирования в экономической науке и экономической практике. Математические методы как инструмент познания для экономистов. Роль прикладных экономико-математических исследований.  
Информационное и математическое обеспечение экономико-математических задач (ЭМЗ). Понятие экономической информации и требования, предъявляемые к исходным данным. Подготовка исходной информации и организация потоков экономических данных.

Экономико-математические модели классифицируют по различным признакам:

1. целевое назначение;
2. масштаб (величина);
3. характер зависимости от времени;
4. способ отображения времени;
5. характер отображения причинно-следственных связей;
6. математический инструмент.

По признаку целевого назначения выделяют теоретические и при­кладные модели. Теоретические модели предназначены для изучения об­щих закономерностей и свойств рассматриваемой экономической системы. Прикладные модели дают возможность определять и оценивать параметры функционирования конкретных экономических объектов и формулировать рекомендации для принятия практических хозяйственных решений.

По признаку масштаба (величины) изучаемого экономического объекта модели делят на макроэкономические и микроэкономические. Макроэкономические модели описывают экономику государства как еди­ное целое, связывая между собой укрупненные (агрегированные) матери­ально-вещественные и финансовые показатели: валовый национальный продукт, национальный доход, совокупный спрос, совокупное потребле­ние, инвестиции, занятость, инфляцию, процентную ставку, количество денег и т. д. Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики либо хозяйст­венное поведение отдельной такой составляющей (отрасли, региона, фирмы, потребителя и т. п.).

По признаку характера зависимости от времени модели делят на статические и динамические. Статические - это модели, в которых зна­чения всех параметров относятся к одному кванту (моменту или периоду) времени. Динамические - это модели, у которых параметры изменяются во времени.

По признаку способа отображения времени модели делятся на не­прерывные и дискретные. Непрерывные - это те, в которых время рас­сматривается как непрерывный фактор. Дискретные - это модели, в кото­рых время квантовано.

По характеру отображения причинно-следственных связей разли­чают детерминированные, стохастические и теоретико-игровые моде­ли. Детерминированные модели - те, в которых предполагаются жесткие функциональные связи. Стохастические модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют инст­рументарий теории вероятностей и математической статистики. Теоре­тико-игровые модели учитывают воздействие факторов, обладающих бо­лее высокой степенью неопределенности, нежели стохастическая.

И, наконец, экономико-математические модели классифицируют по математическому инструменту, применяемому при моделировании. Наиболее распространенными и эффективными математическими мето­дами, которые нашли как теоретическое, так и практическое приложение в экономических исследованиях, являются: дифференциальное исчисле­ние, математическая статистика, линейная алгебра, математическое про­граммирование, теория графов, теория вероятностей и теория игр.

Порядок построения экономико-математических моделей состоит в следующем: определяется объект исследования (экономика государства в целом, отрасль, предприятие, цех, некоторый социально-экономический процесс, технолого-экономический процесс и т. п.), формулируется цель исследования.

В рассматриваемом экономическом объекте выделяются структур­ные и функциональные элементы и наиболее существенные качествен­ные характеристики этих элементов, влияющие на достижение постав­ленной цели. Вводятся символические обозначения для учитываемых ха­рактеристик экономического объекта. Определяется, какие из них будут рассматриваться как эндогенные, а какие как экзогенные; какие как зави­симые величины, а какие - независимые; какие как неизвестные (иско­мые), а какие как известные. Формализуются взаимосвязи между опреде­ленными параметрами модели, т. е. строится собственно экономико- математическая модель. Проводятся расчеты по модели и анализируются результаты полученных расчетов. Если результаты оказываются неудов­летворительными с точки зрения неадекватности отображения модели­руемого процесса или явления, то происходит возврат к одному из пред­шествующих пунктов и процесс повторяется.

В современной экономике математика выступает в качестве необхо­димого инструмента, с помощью которого предприниматель может вы­брать наилучший вариант действий из многих возможных. Соединение экономики бизнеса с математическими расчетами получило название экономико-математических методов. При этом для построения математи­ческой модели решения любой экономической задачи существует свой математический метод (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1 - Выбор математического метода для решения экономической задачи

|  |  |
| --- | --- |
| Экономический смысл задачи | Математический метод |
| Экономические расчеты, связанные с определением до­лей, процентов, пропорций материальных ресурсов, счетом денег, вычислением прибыли, налогов, рента­бельности и т. д. | Арифметика (доли, проценты, пропорции), алгебра (уравне­ния, функции,графики) |
| Расчеты задач, содержащих последовательности взаи­мосвязанных экономических показателей и объектов (например, так называемые «пирамиды») | Арифметические и геометриче­ские прогрессии |
| Вычисления, связанные с сочетанием различных эконо­мических объектов, их перестановкой и размещением | Комбинаторика |
| Расчеты в области пространственных отношений и форм экономических объектов | Геометрия |
| Оценка экономических ситуаций, связанных определе­нием истинности или ложности информации, необхо­димостью найти выход из затруднительного положения | Логика |
| Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравне­ниями 1-й степени | Линейное программирование |
| Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравне­ниями 2-ой и более степени | Нелинейное программирование |
| Выбор оптимального плана многоэтапной экономиче­ской операции, когда результаты каждого последующе­го этапа зависят от предыдущего | Динамическое программирова­ние |
| Экономические расчеты, связанные с явлениями и ве­личинами случайного характера | Теория вероятностей |
| Сбор, обработка и анализ статистических экономиче­ских материалов | Математическая статистика |
| Расчеты производственно-экономических показателей и выработка необходимых рекомендаций в массовых повторяющихся случайных явлениях | Теория массового обслужива­ния (теория очередей) |
| Экономические расчеты, связанные с явлениями и величи­нами случайного характера, на основе искусственно про­изведенных статистических материалов | Метод статистических испыта­ний (Монте-Карло) |
| Выработка экономических решений в условиях неопреде­ленности ситуации, вызванной сознательными злонамерен­ными действиями конфликтующей стороны | Теория игр |
| Выработка экономических решений в условиях неопре­деленности ситуации, вызванной объективными об­стоятельствами | Теория статистических реше­ний |
| Составление и реализация рациональных планов про­ведения экономических операций, предусматривающих решение задачи в кратчайший срок и с наилучшими ре­зультатами | Сетевое планирование |

Важнейшим видом формализованного знакового моделирования является математического моделирование, осуществляемое средствами языка математики и логики. Для изучения какого-либо класса явлений внешнего мира строится его математическая модель, т.е. приближенное описание этого класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

Сам процесс математического моделирования можно подразделить на четыре основных этапа:

I этап: Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, т.е. запись в виде математических терминов сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

II этап: Исследование математических задач, к которым приводят математические модели.

Основной вопрос - решение прямой задачи, т.е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений.

III этап: Корректировка принятой гипотетической модели согласно критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

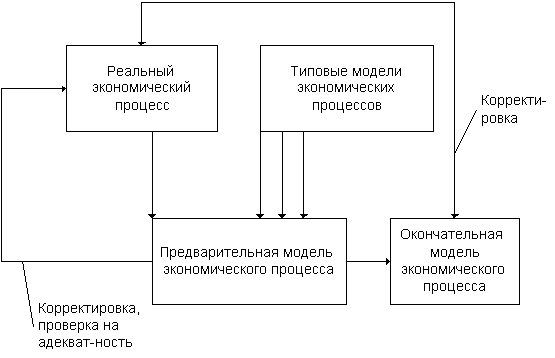
Если модель была вполне определена - все параметры ее были даны, - то определение уклонений теоретических следствий от наблюдений дает решения прямой задачи с последующей оценкой уклонений.

Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели некоторые ее характеристики остаются не определенными.

Применение критерия практики к оценке математической модели позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели.

IV этап: Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изученных явлениях и модернизация модели.

С появлением ЭВМ метод математического моделирования занял ведущее место среди других методов исследования. Особенно важную роль этот метод играет в современной экономической науке. Изучение и прогнозирование какого-либо экономического явления методом математического моделирования позволяет проектировать новые технические средства, прогнозировать воздействие на данное явление тех или иных факторов, планировать эти явления даже при существовании нестабильной экономической ситуации. Экономические модели, исходя из общего процесса математического моделирования, строятся следующим образом:



Математические методы, основанные на математическом моделировании, все шире применяются в промышленно-экономических исследованиях, в частности, в операционных исследованиях.

Операционные исследования являются методом выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию управленческих решений. Описание всякой задачи операционных исследований включает в себя задание факторов решения, которые являются численными переменными, налагаемых на них ограничений (отражающих ограниченность ресурсов) и системы целей.

Всякая система факторов решения, удовлетворяющих всем ограничениям, называется допустимым решением. Каждой из целей соответствует целевая функция, заданная на множестве допустимых решений, значения которых выражают меру осуществления цели.

Сущность задачи операционных исследований состоит в нахождении наиболее целесообразных, оптимальных решений. Поэтому задачи операционных исследований обычно называются оптимизационными.

Для разработки наиболее важных задач в операционных исследованиях широко используются математические модели, построенные на статистической или вероятностной (стохастической) основе. Они помогают учесть даже такие факторы, просчитать точное изменение которых практически невозможно.

Особенно часто применяются математические модели очередей и управления запасами.

Теория очередей опирается на разработанную учеными А.Н. Колмогоровым и А.Л. Ханчиным теорию массового обслуживания.

**Теория массового обслуживания**

Данная теория позволяет изучать системы, предназначенные для обслуживания массового потока требований случайного характера. Случайными могут быть как моменты появления требований, так и затраты времени на их обслуживание. Целью методов теории является отыскание разумной организации обслуживания, обеспечивающей заданное его качество, определение оптимальных (с точки зрения принятого критерия) норм дежурного обслуживания, надобность в котором возникает непланомерно, нерегулярно.

С использованием метода математического моделирования можно определить, например, оптимальное количество автоматически действующих машин, которое может обслуживаться одним рабочим или бригадой рабочих и т.п.

Типичным примером объектов теории массового обслуживания могут служить автоматические телефонные станции (АТС). На АТС случайным образом поступают “требования” - вызовы абонентов, а “обслуживание” состоит в соединении абонентов с другими абонентами, поддержание связи во время разговора и т.д. Задачи теории, сформулированные математически, обычно сводятся к изучению специального типа случайных процессов.

Исходя их данных вероятностных характеристик поступающего потока вызовов и продолжительности обслуживания и учитывая схему системы обслуживания, теория определяет соответствующие характеристики качества обслуживания (вероятность отказа, среднее время ожидания начала обслуживания т.п.).

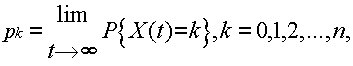
Предположим, что автоматическая линия связи имеет http://ic3.static.km.ru/img/8716_3.gif одинаково доступных для абонентов каналов. Вызовы поступают в случайные моменты времени. Если при поступлении очередного вызова все http://ic3.static.km.ru/img/8716_3.gif каналов лини связи оказываются занятыми, то поступивший вызов получает отказ и теряется. В противном случае немедленно начинается разговор по одному из свободных каналов, длящийся случайное время.

Одной из характеристик эффективности работы такой линии связи является доля вызовов, получающих отказ, т.е. предел http://ic3.static.km.ru/img/8716_4.gifприhttp://ic3.static.km.ru/img/8716_5.gif (если он существует) отношения http://ic3.static.km.ru/img/8716_6.gif числа http://ic3.static.km.ru/img/8716_7.gifвызовов, потерянных в течение времени http://ic3.static.km.ru/img/8716_8.gif, к общему числу http://ic3.static.km.ru/img/8716_9.gifвызовов, поступивших за это время. Этот предел можно назвать вероятностью отказа.

Другим показателем качества работы линии связи может служить отношение времени ее занятости, т.е. предел http://ic3.static.km.ru/img/8716_10.gif при http://ic3.static.km.ru/img/8716_11.gif (если он существует) отношения

**τΤ/http://ic3.static.km.ru/img/8716_12.gif**, где **τΤ -**суммарное время, в течение которого за период **http://ic3.static.km.ru/img/8716_12.gif** все http://ic3.static.km.ru/img/8716_3.gifканалов линии связи одновременно заняты. Этот предел можно назвать вероятностью занятости.

Обозначим http://ic3.static.km.ru/img/8716_13.gif число каналов, занятых в момент http://ic3.static.km.ru/img/8716_14.gif. Тогда можно показать, что: если , во-первых, моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток однородных событий, во-вторых, длительности разговоров последовательных абонентов суть независимые (между собой и от моментов поступления вызовов) одинаково распределенные случайные величины, то случайный процесс http://ic3.static.km.ru/img/8716_15.gif , обладает эргодичным распределением, т.е. существуют [независящие от начального распределения http://ic3.static.km.ru/img/8716_16.gif пределы



причем

http://ic3.static.km.ru/img/8716_18.gif(\*)

где http://ic3.static.km.ru/img/8716_19.gif - произведение интенсивности потока поступлений вызовов на среднюю длительность разговора отдельного абонента.

Кроме того, в этом случае http://ic3.static.km.ru/img/8716_20.gif, и их общее значение равно http://ic3.static.km.ru/img/8716_21.gif.

Формулы (\*), называемые формулами Эрланга, используются для расчета минимального количества каналов линии связи, обеспечивающей заданную вероятность отказа. При отказе от условия, что моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток однородных событий, равенство http://ic3.static.km.ru/img/8716_20.gifне может выполняться.

Математическими моделями многочисленных задач технико-экономического содержания являются также задачи линейного программирования. Линейное программирование - это дисциплина, посвященная теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных равенств и неравенств.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

**Задача планирования работы предприятия**

Для производства однородных изделий необходимо затратить различные производственные факторы - сырье , рабочую силу, станочный парк, топливо, транспорт и т.д. Обычно имеется несколько отработанных технологических способов производства, причем в этих способах затраты производственных факторов в единицу времени для выпуска изделий различны.

Количество израсходованных производственных факторов и количество изготовляемых изделий зависит от того, сколько времени предприятие будет работать по тому или иному технологическому способу.

Ставиться задача рационального распределения времени работы предприятия по различным технологическим способам, т.е. такого, при котором будет произведено максимальное количество изделий при заданных ограниченных затратах каждого производственного фактора.

Формализуем задачу: Пусть имеется http://ic3.static.km.ru/img/8716_22.gif количество технологических способов производства изделий и http://ic3.static.km.ru/img/8716_23.gif производственных факторов.

Введем обозначения:

http://ic3.static.km.ru/img/8716_24.gif- количество изделий, выпускаемых в единицу времени при работе по j - му технологическому способу;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_25.gif - расход i - го производственного фактора в единицу времени при работе по j - му технологическому способу;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_26.gif - имеющиеся ресурсы i - го производственного фактора;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_27.gif - планируемое время работы по j - му технологическому способу.

Величина

http://ic3.static.km.ru/img/8716_28.gif

обозначает общий расход i - го производственного фактора при плане

http://ic3.static.km.ru/img/8716_29.gif.

Поскольку ресурсы ограничены величинами http://ic3.static.km.ru/img/8716_26.gif, то возникают естественные условия:

http://ic3.static.km.ru/img/8716_30.gif(1)  
http://ic3.static.km.ru/img/8716_31.gif(2)

Ставится задача отыскания такого распределения времени (оптимального плана) http://ic3.static.km.ru/img/8716_32.gif работы по каждому технологическому способу при котором общий объем продукции был бы максимальным, т.е. определяется максимум линейной функции

http://ic3.static.km.ru/img/8716_33.gif

В операционных исследованиях эту функцию принято называть целевой функцией или критерием эффективности, вектор http://ic3.static.km.ru/img/8716_34.gif - планом, вектор http://ic3.static.km.ru/img/8716_32.gif - оптимальным планом , а множество, определенное условиями (1) - (2) - допустимым или множеством планов.

Еще одним ярким примером применения линейного программирования в экономике является так называемая транспортная задача.

**Транспортная задача**

Это задача о наиболее рациональном плане перевозок однородного продукта из пунктов производства в пункты потребления.

Пусть имеется http://ic3.static.km.ru/img/8716_23.gif пунктов производства некоего однородного продукта http://ic3.static.km.ru/img/8716_35.gif и http://ic3.static.km.ru/img/8716_36.gif пунктов его потребления http://ic3.static.km.ru/img/8716_37.gif. В пункте http://ic3.static.km.ru/img/8716_38.gif http://ic3.static.km.ru/img/8716_39.gif производится http://ic3.static.km.ru/img/8716_40.gif единиц, а в пункте http://ic3.static.km.ru/img/8716_41.gif http://ic3.static.km.ru/img/8716_42.gifпотребляется http://ic3.static.km.ru/img/8716_43.gif единиц продукта.

Предполагается, что

http://ic3.static.km.ru/img/8716_44.gif.

Транспортные издержки, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта http://ic3.static.km.ru/img/8716_38.gif в пункт http://ic3.static.km.ru/img/8716_41.gif равны http://ic3.static.km.ru/img/8716_45.gif .

Суть задачи состоит в составлении оптимального плана перевозок, минимизирующего суммарные транспортные издержки, при реализации которого запросы всех пунктов потребления http://ic3.static.km.ru/img/8716_41.gif,http://ic3.static.km.ru/img/8716_46.gif, были бы удовлетворены за счет производство продукта в пунктах http://ic3.static.km.ru/img/8716_38.gif , http://ic3.static.km.ru/img/8716_47.gif .

Пусть http://ic3.static.km.ru/img/8716_48.gif - количество продукта, перевозимого из пункта http://ic3.static.km.ru/img/8716_38.gif в пункт http://ic3.static.km.ru/img/8716_41.gif. Тогда транспортная задача формулируется так: определить значения переменных http://ic3.static.km.ru/img/8716_48.gif, http://ic3.static.km.ru/img/8716_47.gif,http://ic3.static.km.ru/img/8716_46.gif, минимизирующих транспортные издержки.

http://ic3.static.km.ru/img/8716_49.gif

при условиях,

http://ic3.static.km.ru/img/8716_50.gif(1)  
http://ic3.static.km.ru/img/8716_51.gif(2)  
http://ic3.static.km.ru/img/8716_52.gif.(3)

Множество http://ic3.static.km.ru/img/8716_53.gif, удовлетворяющее этим условиям, называется планом перевозок, а его элементы - перевозками.

На основе метода математического моделирования в операционных исследованиях решаются также многие важные задачи, требующие специфических методов решения. К их числу относятся:

1. Задача надежности изделий.
2. Задача замены оборудования.
3. Теория расписаний (так называемая теория календарного планирования).
4. Задача распределения ресурсов.
5. Задача ценообразования.
6. Теория сетевого планирования.

**Задача надежности изделий**

Надежность изделий определяется совокупностью показателей. Для каждого из типов изделий существуют рекомендации по выбору показателей надежности.

Для оценки изделий , которые могут находиться в двух возможных состояниях - работоспособном и отказовом, применяются следующие показатели:

http://ic3.static.km.ru/img/8716_54.gif - среднее время работы до возникновения отказа (наработка до первого отказа);

http://ic3.static.km.ru/img/8716_55.gif - наработка на отказ;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_56.gif - интенсивность отказов;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_57.gif - параметр потока отказов;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_58.gif - среднее время восстановления работоспособного состояния;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_59.gif- вероятность безотказной работы за время t ;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_60.gif - коэффициент готовности.

Существуют следующие соотношения между показателями надежности:

; http://ic3.static.km.ru/img/8716_61.gif  
http://ic3.static.km.ru/img/8716_62.gif;  
http://ic3.static.km.ru/img/8716_63.gif.

Для восстановленных изделий вероятность появления http://ic3.static.km.ru/img/8716_64.gif отказов за время http://ic3.static.km.ru/img/8716_65.gif в случае простейшего потока отказов определяется законом Пуассона:

http://ic3.static.km.ru/img/8716_66.gif.

Из него следует, что вероятность отсутствия отказов за время http://ic3.static.km.ru/img/8716_65.gif равна

http://ic3.static.km.ru/img/8716_67.gif -

Данная зависимость называется экспоненциальным законом надежности.

**Задача распределения ресурсов**

Вопрос распределения ресурсов является одним из основных в процессе управления производством. Для решения этого вопроса в операционных исследованиях пользуются построением линейной статистической модели.

Предположим, что предприятие располагает http://ic3.static.km.ru/img/8716_68.gif видов ресурсов и http://ic3.static.km.ru/img/8716_69.gif видов продукции, производимой с использованием этих ресурсов. Необходимо так распределить ресурсы, чтобы обеспечить максимальный объем продукции, и , следовательно, увеличение прибыли от ее реализации.

Введем следующие обозначения:

http://ic3.static.km.ru/img/8716_70.gif- количество ресурсов i-го вида http://ic3.static.km.ru/img/8716_71.gif;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_72.gif- максимальный объем выпуска продукции j-го вида http://ic3.static.km.ru/img/8716_73.gif;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_74.gif- количество единиц i-го ресурса, необходимого для производства единицы продукции j-го вида;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_75.gif- прибыль от реализации единицы продукции j-го вида;

http://ic3.static.km.ru/img/8716_76.gif- количество единиц продукции j-го вида.

Совокупная прибыль стремится к максимуму, т.е.

http://ic3.static.km.ru/img/8716_77.gif

Следовательно,

